

# Utilisation des équations de Boussinesq pour le calcul des pressions statiques et sismiques des terres

## Static and seismic earth pressures from Boussinesq equations

Sébastien Burlon<sup>1\*</sup>, Youssef ABBOUD<sup>2\*</sup>

*1 Cerema, Paris, France*

*2 SETEC Terrasol, Paris, France*

\* [sebastien.burlon@cerema.fr](mailto:sebastien.burlon@cerema.fr), [youssef.abboud@setec.com](mailto:youssef.abboud@setec.com)

**RESUME :** Le calcul des coefficients de pression des terres reste un enjeu majeur pour la conception des murs de soutènement, en conditions statiques comme sismiques. En conditions statiques, l'approche conventionnelle pour déterminer ces coefficients dans un sol pesant consiste à utiliser les tableaux de Caquot, Kerisel et Absi (Caquot et Kerisel, 1948, Kerisel et Absi, 1990), basés sur la théorie de Boussinesq. Afin d'illustrer la manière dont ces équations différentielles sont résolues en pratique, cet article présente un exemple traitant de leur intégration numérique en expliquant les différentes étapes suivies. Les résultats sont comparés à ceux obtenus par Caquot, Kerisel et Absi d'une part, et par Sokolowski (1965) d'autre part. En conditions sismiques, une procédure de résolution est également proposée et comparée aux solutions obtenues en appliquant les principes de rotation. Pour les conditions statiques et sismiques, les mécanismes de rupture sont déterminés et comparés aux solutions obtenues par l'approche cinématique du calcul à la rupture (mettant en oeuvre des spirales logarithmiques et des mécanismes rotationnels). L'objectif de cet article est de revisiter un problème complexe dont la formulation originale est de moins en moins mise en avant.

**ABSTRACT:** The calculation of the active and passive earth pressure coefficients is still a major issue for the design of gravity or embedded walls both for static and seismic conditions. For static conditions, one of the conventional approaches to determine these coefficients in weighted ground conditions is to use the tables from Caquot, Kerisel and Absi (Caquot et Kerisel, 1948, Kerisel et Absi, 1990) which are based on the Boussinesq's theory. In order to illustrate how these differential equations are solved in practice, this paper includes an example dealing with their numerical integration by explaining the different steps that have been followed. The results are compared to those obtained by Caquot, Kerisel and Absi on the one hand and Sokolowski (1965) on the other hand. For seismic conditions, a solving procedure is also proposed and compared to the solutions obtained by applying rotations principles. For both static and seismic conditions, failure mechanisms are determined and compared to the solutions obtained through the kinematical approach of the yield analysis considering log-spirals and rotational mechanisms. The aim of this paper is to revisit a complex problem for which the original formulation is increasingly less highlighted.

**Mots-clés :** poussée/butée ; résolution numérique ; équations de Boussinesq ; surface de glissement ; calcul à la rupture ; sismique.

## 1 INTRODUCTION

Le calcul des coefficients de pression de poussée et de butée du sol reste un enjeu majeur pour la conception des ouvrages de soutènement, en conditions statiques et sismiques.

De manière conventionnelle, les pressions de poussée et de butée sont calculées en appliquant le principe de superposition qui conduit à prendre en compte trois types de coefficients, à l'aide du théorème des états correspondants (Caquot, 1934) : un coefficient de poussée (ou de butée) du sol  $K_{ay}$  (ou  $K_{py}$ ) pour le sol pesant, un coefficient de poussée (ou de butée) du sol  $K_{aq}$  (ou  $K_{pq}$ ) pour le sol non pesant, et un coefficient de poussée (ou de butée)  $K_{ac}$  (ou  $K_{pc}$ ) pour les sols cohérents.

Dans un souci de simplification, les notations des tableaux établis par Kerisel et Absi (Kerisel et Absi, 1990) sont utilisées (figure 1) : les angles  $\delta$ ,  $\beta$  et  $\lambda$  désignent respectivement l'inclinaison des contraintes de poussée (ou de butée)  $p$  (ou  $b$ ) sur le mur, la pente de la surface du sol et l'inclinaison du mur. La charge appliquée sur la surface libre du sol est  $q$  et son inclinaison par rapport à l'axe normal est  $\alpha$  (cet angle désigne plus généralement l'inclinaison de la contrainte pour toute ligne droite radiale partant de l'origine  $O$ ). Les propriétés du sol sont le poids volumique  $\gamma$ , l'angle de frottement  $\varphi$  et la cohésion  $c$ .

Les pressions de poussée ou de butée du sol peuvent être déterminées pour toute longueur  $l$  le long du mur à l'aide des équations suivantes :

$$p = K_{a\gamma}\gamma l + K_{aq}q - K_{ac}c \quad (1)$$

$$b = K_{p\gamma}\gamma l + K_{pq}q + K_{pc}c \quad (2)$$

Les coefficients  $K_{aq}$  ou  $K_{pq}$  sont utilisés pour calculer les pressions de poussée et butée du sol induites par une charge  $q$  située sur la surface libre du sol et peuvent être déterminés à l'aide d'une solution directe établie par Absi et L'Herminier (1962) ou Lancelotta (2002). L'utilisation du théorème des états correspondants en supposant que la cohésion  $c$  est similaire à une pression de confinement  $c/\tan\varphi$  permet de déterminer les coefficients  $K_{ac}$  et  $K_{pc}$ .

En conditions statiques, les coefficients  $K_{a\gamma}$  et  $K_{p\gamma}$  ne dépendent que de l'angle de frottement  $\varphi$  et peuvent être déterminés à l'aide des équations proposées par Boussinesq (1876). Caquot et Kerisel ont proposé une première méthode pour résoudre ces équations, qui a abouti à la publication de tables de poussée/butée en 1948 (Caquot et Kerisel, 1948), mises à jour en 1966, 1972 et 1990. D'autres approches ont été développées, notamment par Résal (1903) ou Ravizé (1945). Certaines différences, négligeables dans la pratique, peuvent être identifiées entre les différents travaux, reflétant les incertitudes dans le processus de résolution des équations différentielles : par exemple, dans le cas de la poussée du sol sur une paroi verticale ( $\lambda=0$ ), une surface horizontale du sol ( $\beta=0$ ), une inclinaison de contrainte  $\delta$  égale à  $-\varphi$  et un angle de frottement  $\varphi$  égal à  $30^\circ$ , on trouve les valeurs suivantes : 6,42 en 1948, 6,56 en 1966 et 6,50 en 1990. Ces valeurs peuvent être comparées à celles proposées par Sokolowski (1965), obtenues par application de la théorie des lignes de glissement (Salençon, 1974, Absi, 1984) et en utilisant une méthode des différences finies : pour cet exemple, la valeur est égale à 6,55.

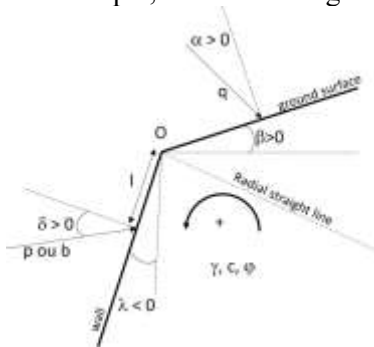


Figure 1. Notations

En conditions sismiques, les principes de rotation (Seed et Whitman, 1970) sont généralement utilisés pour déterminer ces coefficients  $K_{aE\gamma}$  et  $K_{pE\gamma}$ . Des paramètres intermédiaires sont ainsi définis :

$$\theta_{eq} = \text{atan} \left( \frac{a_h}{1 \pm a_v} \right) \quad (3)$$

$$\lambda^* = \lambda \pm \theta_{eq} \text{ et } \beta^* = \beta \pm \theta_{eq} \quad (4)$$

$$\gamma^* = \gamma \frac{(1 \pm a_v)}{\cos\theta_{eq}} \text{ et } q^* = q \frac{(1 \pm a_v)}{\cos\theta_{eq}} \quad (5)$$

$$K_{aE\gamma} = K_{a\gamma}^* \frac{1 \pm a_v}{\cos\theta_{eq}} \text{ avec } K_{a\gamma}^* = K_{a\gamma}(\lambda^*, \beta^*) \quad (6a)$$

$$K_{pE\gamma} = K_{p\gamma}^* \frac{1 \pm a_v}{\cos\theta_{eq}} \text{ avec } K_{p\gamma}^* = K_{p\gamma}(\lambda^*, \beta^*) \quad (6b)$$

Où  $a_h$  et  $a_v$  sont les composantes horizontale et verticale de l'accélération sismique.

L'objectif de cet article est de présenter une méthode originale pour résoudre les équations de Boussinesq en conditions statiques et sismiques. En conditions statiques, les résultats sont comparés à ceux obtenus par Caquot, Kerisel et Absi d'une part, et par Sokolowski (1965) d'autre part. En conditions sismiques, les résultats du processus de résolution sont comparés aux solutions obtenues en appliquant les principes de rotation (Seed et Whitman, 1970, Lancelotta, 2007, Mylonakis et al., 2007). Pour les conditions statiques et sismiques, les mécanismes de rupture sont déterminés et comparés aux solutions obtenues par l'approche cinématique du calcul à la rupture (mettant en jeu des spirales logarithmiques et des mécanismes de rotation).

## 2 ÉQUATIONS DE BOUSSINESQ – CONDITIONS STATIQUES

### 2.1 Équations fondamentales

L'équilibre de Boussinesq conduit à considérer l'équilibre statique d'un volume élémentaire OMN situé à l'arrière d'un ouvrage de soutènement avec un poids  $W$  par unité de longueur (figure 2). L'équilibre en termes de rotation autour du point O donne l'équation 7 et l'équilibre en termes de forces le long de [OM] donne l'équation 8 (voir Caquot et Kerisel, 1949 pour plus de détails). On obtient ainsi le système d'équations différentielles suivant :

$$\frac{dn}{d\omega} = 3t - \sin\omega \quad (7)$$

Obtenu à partir de :

$$\frac{n}{3} - \frac{n + dn}{3} + t d\omega = \frac{2}{3} W \sin\omega$$

$$\frac{dt}{d\omega} = nm - \cos\omega \quad (8)$$

Obtenu à partir de :

$$\frac{nd\omega}{2} + \frac{dt}{2} - kn d\omega + W \cos\omega = 0$$

Avec :  $m = 2k - 1$ ,  $W = \frac{d\omega}{2}$  et

$$m = 1 + 4 \tan^2\varphi \pm \frac{4}{\cos\varphi} \sqrt{\tan^2\varphi - \tan^2\alpha}$$

Où  $\omega$  est l'angle entre le plan vertical fictif et un plan radial donné et  $\alpha$  est l'inclinaison de la contrainte sur la ligne normale au plan radial avec  $n$  la

composante normale et  $t$  la composante tangentielle ( $\tan(\alpha)=t/n$ ).

Le paramètre  $m$  garantit le respect du critère de rupture de Mohr-Coulomb. Il décrit une ellipse dépendant de la variable  $\tan\alpha$  : la partie supérieure de l'ellipse (avec le signe  $+$ ) est liée à la pression de poussée, tandis que la partie inférieure de l'ellipse (avec le signe  $-$ ) est liée à la pression de butée.

Boussinesq montre qu'aucune solution directe n'existe pour ce système d'équations différentielles. Par conséquent, une intégration numérique est nécessaire : plusieurs procédures de résolution ont été développées dans le cadre de la théorie des lignes de glissement après 1950 (voir par exemple Absi, 1984) et sont basées sur les principes des approximations par l'intérieur du calcul à la rupture (voir par exemple Salençon, 1974).

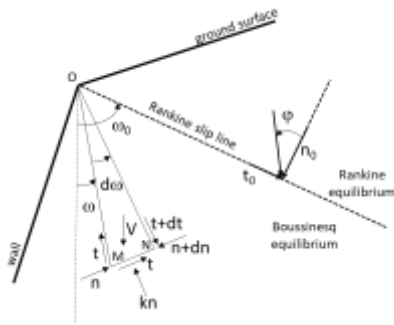


Figure 2. Équilibre pour un volume élémentaire (d'après Caquot et Kerisel, 1949)

## 2.2 Procédure de résolution

La procédure de résolution commence par la détermination de deux domaines (figure 2) : le domaine de Rankine et le domaine de Boussinesq. Pour le domaine de Rankine, la solution est définie par des lignes de glissement droites et il a été démontré par Ravizé (1945, d'après Caquot et Kerisel, 1949) qu'il s'agit d'une solution unique. La ligne de glissement à la frontière du domaine de Rankine définit une ligne de singularités, utilisée comme condition limite initiale pour résoudre les équations différentielles (7) et (8) dans le domaine de Boussinesq.

La frontière du domaine de Rankine (ligne de singularités) correspond à un angle  $\omega_0$  calculé à partir du plan fictif vertical : l'inclinaison de la contrainte est égale à  $\phi$  pour l'état de poussée et à  $-\phi$  pour l'état de butée, car elle assure l'équilibre de Rankine. Les composantes normales et tangentielles  $n_0$  et  $t_0$  sont déterminées en considérant l'équilibre du coin OMN (comme l'inclinaison de la contrainte est égale à  $\pm\phi$ , l'inclinaison de la ligne de glissement est également égale à  $\pm\phi$  par rapport au plan radial défini par l'angle  $\omega_0$ , voir figure 3) :

$$p_0 = 2P_0 \quad (9)$$

$$= 2(W_T \pm W_N \tan\phi) = \frac{\cos(\omega_0 - \beta) \sin\omega_0}{\sin(\omega_0 - \beta \pm \phi)}$$

$$n_0 = \cos\phi \frac{\cos(\omega_0 - \beta) \sin\omega_0}{\sin(\omega_0 - \beta \pm \phi)}$$

$$\text{Et } t_0 = \pm \sin\phi \frac{\cos(\omega_0 - \beta) \sin\omega_0}{\sin(\omega_0 - \beta \pm \phi)} \quad (10)$$

$$\text{Avec : } \omega_0 = \frac{\pi}{4} \pm \frac{\phi}{2} \pm \frac{(\omega_\beta \pm \beta)}{2} \text{ et } \omega_\beta = \arcsin\left(\frac{\sin\beta}{\sin\phi}\right)$$

Avec  $(-)$  pour le cas de poussée et  $(+)$  pour le cas de butée. L'angle  $\omega_0$  est positif à partir du plan fictif vertical.

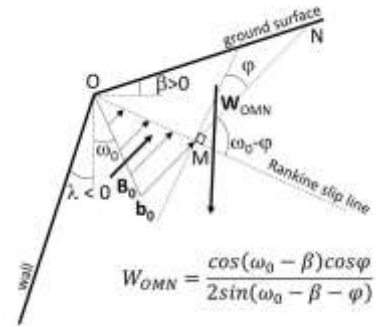


Figure 3. Calcul des termes  $W_{OMN}$ ,  $B_0$  et  $b_0$

Salençon (1974) montre que le système d'équations différentielles (7) et (8) avec les conditions aux limites sur la ligne de glissement de Rankine est indéterminé. Néanmoins, il est possible de résoudre ces équations en partant de la ligne de glissement de Rankine jusqu'à la paroi, mais l'inclinaison de la contrainte sur le mur ne peut pas être choisie.

La figure 4 montre les calculs pour le cas :  $\phi=30^\circ$ ,  $\beta=0$ ,  $\lambda=0$ , avec  $\delta/\phi=-1$  pour le cas de butée. La première solution, partant de la frontière du domaine de Rankine vers le mur, conduit au chemin 1. Pour calculer la pression du sol pour toute inclinaison  $\delta$  de la contrainte, une deuxième solution (chemin 2) est calculée dans la direction opposée, du mur vers la frontière du domaine de Rankine. La pression (poussée ou butée) au niveau du mur est ajustée de manière itérative (en utilisant, par exemple, une méthode dichotomique) afin d'assurer la continuité au niveau de la frontière du domaine de Rankine entre les chemins 1 et 2. Pour les chemins 1 et 2, les solutions sont obtenues par intégration numérique explicite des équations différentielles 7 et 8, à l'aide d'une procédure de Runge-Kutta du quatrième ordre (RK4) (voir Burlon, 2023 pour plus de détails). Les coefficients obtenus correspondent étroitement à ceux de Caquot, Kerisel, Absi et Sokolowski.

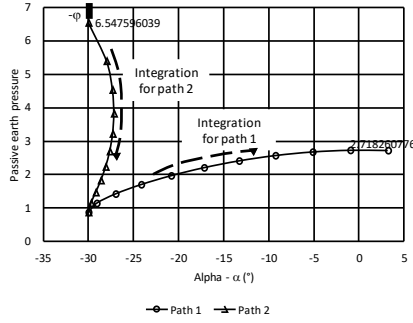


Figure 4. Évolution de la butée en fonction de  $\alpha$

### 3 ÉQUATIONS DE BOUSSINESQ – CONDITIONS SISMIQUES

En conditions sismiques, les équations (7) et (8) sont modifiées pour tenir compte des forces d'inertie dans le sol, avec  $a_h$  et  $a_v$  les composantes horizontale et verticale de l'accélération sismique.

$$\frac{dn}{d\omega} = 3t - ((1 \pm a_v)\sin\omega \pm a_h\cos\omega) \quad (11)$$

$$\frac{dt}{d\omega} = nm - ((1 \pm a_v)\cos\omega \pm a_h\sin\omega) \quad (12)$$

Les conditions aux limites initiales sur la frontière du domaine de Rankine sont également modifiées. L'angle  $\omega_0$  est modifié en  $\omega_0^*$  afin d'intégrer les équations (11) et (12) :

$$\omega_0^* = \frac{\pi}{4} \pm \frac{\varphi}{2} \pm \frac{(\omega_{\beta^*} \pm \beta^*)}{2} \pm \theta_{eq} \quad (13)$$

avec  $\omega_{\beta^*} = \arcsin\left(\frac{\sin\beta^*}{\sin\varphi}\right)$

Avec (-) pour le cas de poussée et (+) pour le cas de butée.

Les valeurs  $n_0$  et  $t_0$  sont également modifiées conformément aux notations de la figure 3. Les étapes de résolution restent les mêmes que celles expliquées pour les conditions statiques.

On considère le cas suivant :  $\varphi=30^\circ$ ,  $\beta=0$ ,  $\lambda=0$  avec  $\delta/\varphi=1$  pour le cas de poussée et  $\delta/\varphi=-1$  pour le cas de butée, avec les composantes d'accélération  $a_h$  et  $a_v$  respectivement égales à 0,2 et -0,1. Les variations de contrainte en fonction de  $\alpha$  et  $\omega$  peuvent être déterminées pour obtenir les coefficients sismiques  $K_{aE\gamma}$  et  $K_{pE\gamma}$  : le coefficient de pression active du sol est égal à 0,449 (contre 0,307 dans des conditions statiques) et le coefficient de pression passive du sol est égal à 4,90 (contre 6,55 dans des conditions statiques).

Les figures 5 et 6 montrent la comparaison entre les coefficients sismiques  $K_{aE\gamma}$  et  $K_{pE\gamma}$  et les coefficients  $K_{a\gamma}^*$  et  $K_{p\gamma}^*$  obtenus en appliquant les principes de rotation à la géométrie initiale. La différence peut être interprétée par le terme de rotation :  $(1 \pm a_0)/\cos\Theta_{eq}$ . Les pressions actives et passives du sol  $K_{aE\gamma}$  et  $K_{pE\gamma}$  calculées par les équations de Boussinesq dans des

conditions sismiques correspondent aux pressions actives et passives du sol obtenues en appliquant les principes de rotation :

$$K_{aE\gamma} = K_{a\gamma}^* \frac{1 \pm a_v}{\cos\Theta_{eq}} \quad (17)$$

$$K_{pE\gamma} = K_{p\gamma}^* \frac{1 \pm a_v}{\cos\Theta_{eq}}$$

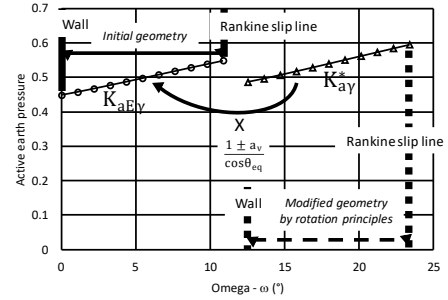


Figure 5. Comparaison entre  $K_{a\gamma}^*$  et  $K_{aE\gamma}$

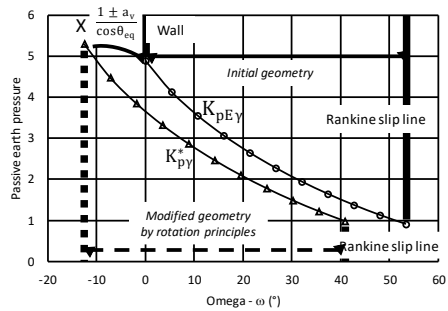


Figure 6. Comparaison entre  $K_{p\gamma}^*$  and  $K_{pE\gamma}$

### 4 EXEMPLE EN CONDITIONS STATIQUES

#### 4.1 Cas d'étude

Le cas d'étude avec  $\varphi=30^\circ$ ,  $\beta=0$ ,  $\lambda=0$  est considéré. Différentes solutions sont comparées : les valeurs de Kerisel et Absi (1990), les valeurs de Coulomb (uniquement pour les cas de poussée) et les valeurs tenant compte d'une solution exacte utilisée pour les sols non pesants (voir L'Herminier et Absi, 1962 ou Lancelotta, 2002) où la charge à la surface libre  $q$  est remplacée par le poids au sol  $\gamma.l.\cos(\beta-\lambda)$ .

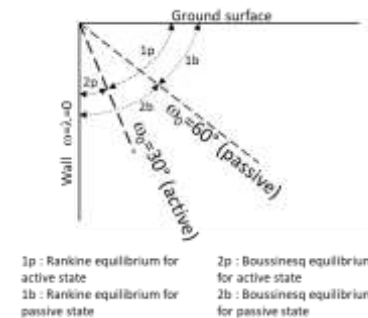


Figure 7. Frontière du domaine de Rankine en situations de poussée ou butée pour les trois cas considérés

## 4.2 Résultats

Les résultats sont présentés dans le tableau 1 pour le cas d'étude considéré. Les résultats obtenus par la méthode proposée et la méthode de Caquot Kerisel sont assez similaires, ce qui montre que la procédure de résolution développée dans cet article est pertinente. La méthode de Coulomb, qui découle d'une approche cinématique du calcul à la rupture, donne des valeurs plus faibles pour les cas de poussée (pour les cas de butée, les valeurs n'ont pas été calculées car on sait que l'hypothèse de lignes de glissement droites n'est plus valable). La solution exacte dérivée des conditions de sol non pesant fournit des résultats très proches de ceux obtenus par la méthode proposée ou la méthode de Caquot Kerisel. Cette dernière aboutit à des valeurs sécuritaires, avec des valeurs plus élevées pour les coefficients de poussée et des valeurs plus faibles pour les coefficients de butée. Lorsque l'inclinaison de la pente ou du mur est élevée, les valeurs obtenues peuvent être considérées comme trop sécuritaires.

Tableau 1. Comparaison des coefficients de poussée/butée

Poussée					
Inclinaison	$\delta/\varphi=1$	$\delta/\varphi=2/3$	$\delta/\varphi=0$	$\delta/\varphi=2/3$	$\delta/\varphi=1$
Méthode proposée	0.886	0.477	0.333	0.301	0.307
Caquot et Kerisel	0.981	0.476	0.333	0.300	0.308
Coulomb	0.866	0.469	0.333	0.297	0.297
Solution directe	1.006	0.484	0.333	0.301	0.315
Butée					
Inclinaison	$\delta/\varphi=1$	$\delta/\varphi=2/3$	$\delta/\varphi=0$	$\delta/\varphi=2/3$	$\delta/\varphi=1$
Méthode proposée	6.55	5.26	3.0	1.46	---
Caquot et Kerisel	6.50	5.30	3.0	1.46	---
Solution directe	5.80	5.26	3.0	1.38	---

### 4.2.1 Comparaisons avec la méthode des spirales logarithmiques

La comparaison avec la méthode des spirales logarithmiques peut également être présentée en termes de coefficients de poussée (et de butée) et des mécanismes de rupture menant au calcul de ces coefficients. La méthode des spirales logarithmiques (Rendulic, 1935, d'après Brinch Hansen, 1953) peut être considérée comme une application de l'approche cinématique du calcul à la rupture. Les valeurs de

poussée du sol devraient donc être légèrement inférieures à celles calculées à l'aide des équations de Boussinesq et les valeurs de butée du sol devraient être légèrement supérieures (Soubra, 2000 ; Patki, 2015). Les calculs des spirales logarithmiques sont effectués à l'aide du logiciel Talren (Talren 2022) : les spirales logarithmiques les plus critiques utilisées pour le calcul du coefficient de pression active ou passive du sol sont déterminées en étudiant différentes positions des centres des spirales logarithmiques, des angles de courbure et des concavités positives ou négatives. Le tableau 2 présente certaines valeurs obtenues par les deux méthodes de calcul : solution proposée et méthode des spirales logarithmiques. Les résultats sont conformes et les deux valeurs sont très proches.

Tableau 2. Comparaisons avec la méthode des spirales logarithmiques

Poussée					
Inclinaison	$\delta/\varphi=1$	$\delta/\varphi=2/3$	$\delta/\varphi=0$	$\delta/\varphi=2/3$	$\delta/\varphi=1$
Méthode proposée	0.886	0.477	0.333	0.301	0.307
Spirales log	0.817	0.467	0.333	0.297	0.297
Butée					
Inclinaison	$\delta/\varphi=1$	$\delta/\varphi=2/3$	$\delta/\varphi=0$	$\delta/\varphi=2/3$	$\delta/\varphi=1$
Méthode proposée	6.55	5.26	3.0	1.46	---
Spirales log	6.931	5.341	3.0	1.650	---

## 5 EXEMPLE D'APPLICATION EN CONDITIONS SISMIQUES

### 5.1 Cas d'étude

Le cas d'étude avec  $\varphi=30^\circ$ ,  $\beta=0$ ,  $\lambda=0$  est considéré dans ce paragraphe avec différentes conditions d'accélération sismique :  $a_h=0,1$  (a) ; 0,2 (b) ou 0,3 (c). L'accélération verticale  $a_v$  peut être positive (+) ou négative (-) et est égale à la moitié de l'accélération horizontale. En se basant sur les principes de rotation (avec l'angle  $\theta_{eq}$ ), les solutions directes (Lancelotta, 2007) présentées précédemment fournissent les valeurs  $K'_{aE\gamma}$  et  $K'_{pE\gamma}$ :

$$K'_{aE\gamma} = K'_{aq} \cos(\beta - \lambda) \quad (14)$$

$$K'_{pE\gamma} = K'_{pq} \cos(\beta - \lambda) \quad (15)$$

### 5.2 Résultats

Les résultats sont présentés dans le tableau 3 pour la méthode proposée, la méthode log-spirale et la solution directe dérivée de Lancelotta (2007), et ce

pour une inclinaison des contraintes ( $\delta/\varphi$ ) égale à 1,0 pour la poussée et à -1,0 pour la butée. Les résultats donnés par les différentes méthodes sont proches et cohérents : lorsque l'accélération verticale est négative (vers le haut), les pressions de poussée/butée sont réduites par rapport au cas où l'accélération verticale est positive (vers le bas). Les résultats de la solution directe sont sécuritaires. La méthode log-spirale donne des valeurs plus faibles pour les pressions de poussée et des valeurs plus élevées pour les pressions de butée, ce qui est attendu pour une approche cinématique du calcul à la rupture. Pour les trois méthodes, les variations sont plus importantes pour les cas de poussée que pour les cas de butée.

Tableau 3. Coefficients de poussée et butée sismique

Poussée			
	$K_{aE\gamma}$ Méthode proposée	$K'_{aE\gamma}$	$K_{aE\gamma}$ (spirales log)
Statique	0.307	0.315	0.297
(a+)	0.392	0.396	0.387
(a-)	0.362	0.366	0.358
(b+)	0.498	0.500	0.496
(b-)	0.449	0.449	0.448
(c+)	0.632	0.632	0.632
(c-)	0.600	0.600	0.600
Butée			
	$K_{pE\gamma}$ Méthode proposée	$K'_{pE\gamma}$	$K_{pE\gamma}$ (spirales log)
Statique	6.548	5.804	6.931
(a+)	6.403	5.740	6.845
(a-)	5.747	5.157	6.148
(b+)	6.223	5.637	6.712
(b-)	4.895	4.456	5.301
(c+)	6.004	5.493	6.527
(c-)	3.957	3.667	4.340

## 6 MÉCANISMES DE RUPTURE

### 6.1 Principaux résultats

En plus des coefficients de poussée et butée du sol, les mécanismes de rupture peuvent être représentés graphiquement : dans le domaine de Rankine, ce mécanisme est une ligne droite (par construction), tandis que dans le domaine de Boussinesq, la forme du mécanisme est proche d'une courbe log-spirale (sans en être exactement une). Cette courbe peut être déterminée à l'aide du cercle de Mohr et de la théorie des lignes de glissement (Absi, 1984) par l'équation suivante, en considérant un rayon  $r$  égal à 1,0 à l'emplacement du mur :

$$r = e^{-\int \tan \xi(\omega) d\omega}$$

$$\xi(\omega) = \frac{\pi}{4} - \pm \frac{\varphi}{2} \pm \frac{(\omega_{\alpha} \pm \alpha)}{2} \text{ et } \omega_{\alpha} = \arcsin\left(\frac{\sin \alpha}{\sin \varphi}\right) \quad (16)$$

Avec (-) pour le cas de poussée et (+) pour le cas de butée.

$\xi(\omega)$  représente l'angle entre la ligne de glissement et la ligne normale à tout plan radial. Au niveau du mur, pour une inclinaison de contrainte égale à zéro ( $\alpha=0$  et  $\omega_{\alpha}=0$ ), les inclinaisons de la ligne de glissement sont égales à  $\pi/4 \pm \varphi/2$  pour les cas de poussée et butée. Pour une inclinaison de contrainte  $\alpha$  sur le mur ( $\delta/\varphi$ ) respectivement égale à 1,0 pour le cas de poussée et -1,0 pour le cas de butée, l'inclinaison de la ligne de glissement est égale à  $\varphi$  ou  $-\varphi$  ( $\alpha = \pm \varphi$  et  $\omega_{\alpha} = \pm \pi/2$ ). La figure 8 et figure 9 montre les mécanismes de rupture déterminés pour différentes inclinaisons de contrainte. La possibilité de représenter les mécanismes de rupture est utile pour visualiser le volume de sol concerné, en particulier pour les pentes de tranchées ou de remblais, et ainsi vérifier si le calcul du coefficient de pression active ou passive du sol est pertinent et acceptable.

Pour les cas de poussée, les lignes de glissement sont droites, ce qui explique les faibles différences entre les théories de Coulomb et de Boussinesq. Néanmoins, pour les cas de butée, il n'est pas possible de supposer des lignes droites (sauf lorsque l'inclinaison des contraintes sur le mur est nulle). De plus, on peut remarquer que la concavité des lignes de glissement peut être positive ou négative selon l'inclinaison sur le mur. Les mécanismes de rupture sont assez similaires à ceux obtenus par Sokolowski (1965).

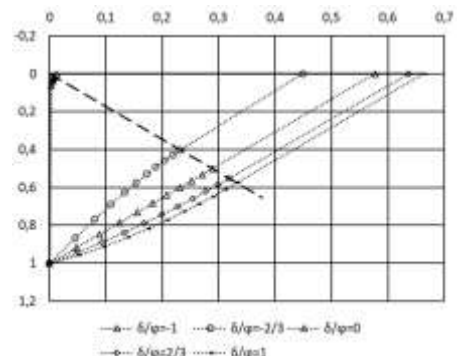


Figure 8. Mécanismes de rupture – cas de poussée

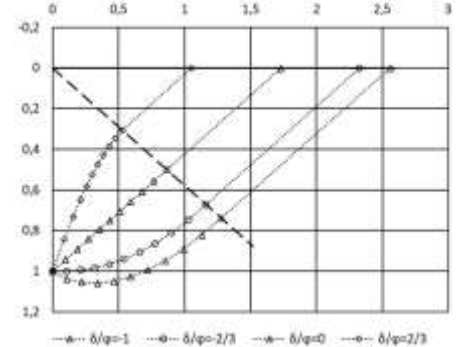


Figure 9. Mécanismes de rupture – cas de butée

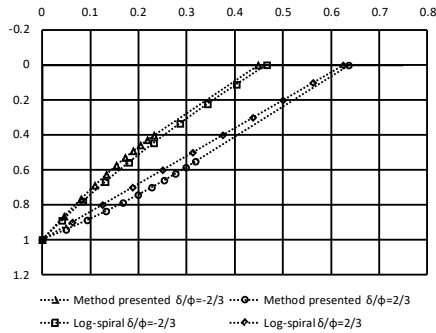


Figure 10. Comparaison des mécanismes de rupture obtenus par différentes méthodes - poussée

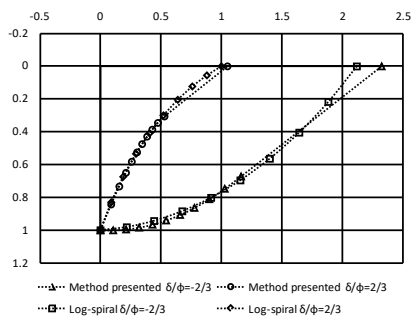


Figure 11. Comparaison des mécanismes de rupture obtenus par différentes méthodes - butée

Les figures 10 et 11 montrent les mécanismes de rupture obtenus à partir de la méthode proposée et la méthode des spirales logarithmiques, en conditions statiques. Les mécanismes de rupture découlant des deux méthodes sont proches, et l'écart observé est cohérent avec les faibles différences obtenues entre les valeurs des pressions de poussée/butée. La concavité des mécanismes de rupture est également la même, ce qui signifie que les valeurs négatives et positives de la concavité doivent être étudiées à l'aide de méthodes log-spirales.

## 7 CONCLUSIONS

Cet article présente une approche numérique permettant de résoudre les équations de Boussinesq afin de calculer les coefficients de poussée/butée des terres en conditions statiques et sismiques. En conditions statiques, les résultats obtenus sont comparés aux valeurs issues des tables établies par Caquot, Kerisel et Absi d'une part, et par la méthode des spirales logarithmiques d'autre part. Les résultats sont assez similaires, ce qui montre la pertinence et la cohérence de l'approche numérique présentée. Les solutions directes proposées par L'Herminier et Absi (1962) et Lancellotta (2002) donnent des résultats proches également et peuvent être considérées comme des estimations sécuritaires des pressions de poussée/butée du sol. Les mécanismes de rupture sont également représentés graphiquement afin d'apprécier le volume de sol impliqué et fournir des informations

sur l'étendue de la zone d'influence. En conditions sismiques, les mêmes résultats ont été obtenus et des conclusions similaires ont été tirées. Les principes de rotation peuvent être appliqués à toute approche de calcul qui a été validée dans des conditions statiques.

## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- Absi, E. (1984). *La théorie de la plasticité et l'équilibre limite en mécanique des sols*, Annales de l'ITBTP, Sols et Fondations.
- Boussinesq, J. (1876). *Essai théorique sur l'équilibre des massifs pulvérulents comparé à celui des massifs solides et sur la poussée des terres sans cohésion*, Hayez, Bruxelles. (Source gallica.bnf.fr / Bibliothèque nationale de France)
- Brinch Hansen, J. (1953). *Earth pressure calculation*. The Danish Technical Press, Copenhagen.
- Burlon, S. (2023). Un exemple d'intégration numérique des coefficients de poussée et de butée en milieux pesants. *Revue française de Géotechnique*, 174, 3.
- Caquot, A. (1934). *Équilibre des massifs à frottement interne – Stabilité des terres pulvérulentes ou cohérentes*, Gauthier-Villars, Paris. (Source gallica.bnf.fr / Bibliothèque nationale de France)
- Caquot, A. et Kerisel, J. (1948). *Tables de butée, de poussée et de force portante des fondations*, Gauthier-Villars, Paris. (Source gallica.bnf.fr / Bibliothèque nationale de France)
- Caquot, A. et Kerisel, J. (1949). *Traité de Mécanique des Sols (2nde Édition de l'ouvrage : Équilibre des massifs à frottement interne – Stabilité des terres pulvérulentes ou cohérentes*, Gauthier-Villars, Paris.
- L'Herminier, R. et Absi, E. (1962). *Équilibre limite d'un coin dans un milieu non pesant. Cahier de la Recherche théorique et expérimentale sur les matériaux et les structures*, Eyrolles, Paris. (Source gallica.bnf.fr / Bibliothèque nationale de France)
- Kerisel, J. et Absi, E. (1990). *Tables de poussée et de butée des terres*. Presse de l'École Nationale des Ponts et Chaussées, Paris.
- Lancellotta, R. (2002). Analytical solution of passive earth pressure. *Géotechnique* 52(8): 617-619.
- Lancellotta, R. (2007). Lower-bound approach for seismic passive earth resistance. *Géotechnique* 57(3): 319-321.
- Mylonakis, G., Kloukinas, P. and Papantonopoulos (2007). An alternative to the Mnonobe-Okabe equations for seismic pressures. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 27, 957-969.
- Patki, M.A, Mandal, J.N. and Dewaikar, D.M. (2015). Computation of passive earth pressure coefficients

for a vertical retaining wall with inclined cohesionless backfill, *International of Geo-Engineering*, 6:4.

- Ravizé, H. (1945). *Poussée des terres – Équations de l'équilibre limite – Nouvelle méthode de détermination des coefficients de poussée et de butée*. Dunod, Paris. (Source gallica.bnf.fr / Bibliothèque nationale de France)
- Rendulic, L. (1935). *Ein Beitrag zur Bestimmung des Gleitsicherheit, Der Bauingenieur*, n°19/20.
- Résal, J. (1903) *Poussée des terres – Stabilité des murs de soutènement*. Librairie Polytechnique Béranger Editeur. (Source gallica.bnf.fr / Bibliothèque nationale de France)
- Seed HB, Whitman, R.V. (1970). Design of earth retaining structures for dynamic loads, *Proceedings of specialty conference on lateral stresses in the ground and design of earth retaining structures*, ASCE, Ithaca, New York, 103-147.
- Sokolowski, V. V. (1965). *Statics of granular media*. Oxford: Pergamon Press.
- Soubra, A-H. (2000). Static and seismic passive earth pressure coefficients on rigid retaining structures. *Canadian Geotechnical Journal*, NRC Research Press, 37 (2), pp.463-478.
- Soubra, A.H. et Macuh, B. (2002). Active and passive earth pressure coefficients by a kinematical approach. *Proceedings of the ICE - Geotechnical Engineering*, Thomas Telford, 155 (2), pp.119-131.
- Talren (2022). *Notice technique*, Terrasol, Paris.